

## SÈRIE 1

1. Considereu les matrius  $M$  de la forma  $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$  en què  $a$  és un nombre real.
- Determineu  $a$  de manera que  $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$ . [1 punt]
  - Determineu  $a$  de manera que  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , en què  $M^{-1}$  representa la matriu inversa de  $M$ . És a dir,  $M \cdot M^{-1} = I$ , en què  $I$  és la matriu identitat d'ordre 2. [1 punt]
- a) Comencem calculant  $M^2$ :  $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}$ . Sabem que  $\begin{pmatrix} 4 - a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$ . Obtenim, per tant, que cal que es compleixi que  $4 - a^2 = 3$  i que  $-a^2 = -1$ . En ambdós casos tenim que  $a^2 = 1$ , que té per solucions  $a = 1$  i  $a = -1$ .
- b) Sabem que  $M \cdot M^{-1} = I$ . Però com que sabem la forma que ha de tenir  $M^{-1}$ , tenim que  $M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2 + 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ . I imposant que aquesta darrera matriu ha de ser igual a la matriu identitat, tenim que  $-a = 1$ , és a dir, que  $a = -1$ , i que  $2 + 2a = 0$ , que també es compleix quan  $a = -1$ . Per tant, l'única solució és  $a = -1$ .
- Alternativament es pot calcular la matriu inversa  $M^{-1}$  i igualar a la forma que ha de tenir segons l'enunciat del problema.

*Criteris de correcció: a) Càlcul de  $M^2$ : 0,5 p. Plantejament de la igualtat matricial: 0,25 p. Obtenció dels dos possibles valors de  $a$ : 0,25 p. b) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció del valor de  $a$ : 0,5 p.*

2. Considereu la funció  $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$ , en què  $a$  és un paràmetre real.
- Trobeu per a quins valors del paràmetre  $a$  la recta tangent a la funció  $f$  en  $x = 1$  és paral·lela a  $y + 3x + 5 = 0$ . [1 punt]
  - Per al valor del paràmetre  $a = 1$ , trobeu els intervals de creixement i decreixement i els punts on s'assoleixen els màxims i mínims relatius de la funció  $f$ . [1 punt]

- a. Com que la derivada és el pendent de la recta tangent, hem d'imposar la condició  $f'(1) = -3$ . La derivada de la funció donada  $f$  és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2}$$

Per tant, hem de resoldre l'equació

$$\frac{1 - 2a}{(1-a)^2} = -3$$

o equivalentment  $3a^2 - 8a + 4 = 0$ , que dona com a solucions  $a = 2$  i  $a = \frac{2}{3}$ .

- b. Hem d'estudiar la funció  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  que té domini  $\mathbb{R} - \{1\}$ . La derivada és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

i s'anul·la en  $x = 0$  i  $x = 2$ .

Estudiant els signes de la derivada obtenim:

$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
$f$ creixent	$f$ decreixent	$f$ decreixent	$f$ creixent

Es dedueix que la funció  $f$  té un màxim relatiu al punt  $(0, f(0)) = (0, 0)$  i un mínim relatiu al punt  $(2, f(2)) = (2, 4)$ .

*Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts: 0,25 p. b) Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. Obtenció i justificació dels extrems relatius: 0,5 p.*

3. En Pol va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 refrescos, 3 entrepans i 5 boles de gelat. Tot plegat els va costar 19,50€. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí i per 2 refrescos, 1 entrepà i 2 boles de gelat havien pagat 8,10€. En aquest bar tots els refrescos valen el mateix, tots els entrepans tenen el mateix preu i les boles de gelat es venen també a preu únic.
- Avui en Pol hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 6 refrescos, 5 entrepans i 8 boles de gelat. Expliqueu raonadament quant han pagat en total. [1 punt]
  - Si 1 refresc, 1 entrepà i 1 bola de gelat costen 5,10€, quant val el refresc, l'entrepà i la bola de gelat separatament? [1 punt]
- a) Si anomenem  $x$ ,  $y$  i  $z$  respectivament el preu d'un refresc, d'un entrepà i d'una bola de gelat sabem que es compleixen les dues equacions següents:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \end{cases}$$

Ara necessitem calcular el valor de  $6x + 5y + 8z$ , però observem que podem descompondre  $6x + 5y + 8z$  en

$$2 \cdot (4x + 3y + 5z) - 1 \cdot (2x + y + 2z) = 6x + 5y + 8z$$

Per tant, el preu serà  $2 \cdot 19,50 - 1 \cdot 8,10 = 30,90$ €.

Una altra opció és buscar la solució del sistema  $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \end{cases}$ , que és un sistema compatible indeterminat amb solució:

$$\begin{cases} x = 2,40 - \frac{t}{2} \\ y = 3,30 - t \\ z = t \end{cases} \text{ i, per tant, } 6x + 5y + 8z = 6 \cdot \left(2,40 - \frac{t}{2}\right) + 5 \cdot (3,30 - t) + 8t = 14,40 - 3t + 16,50 - 5t + 8t = 30,90$$

b) En aquest cas, tenim el sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\begin{cases} x + y + z = 5,10 \\ 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \end{cases} \text{ que, si el resollem, per exemple, pel mètode de Gauss}$$

obtenim  $x = 1,80\text{€}$ ,  $y = 2,10\text{€}$  i  $z = 1,20\text{€}$ .

*Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució per qualsevol dels mètodes possibles: 0,75 p. b) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució: 0,75 p.*

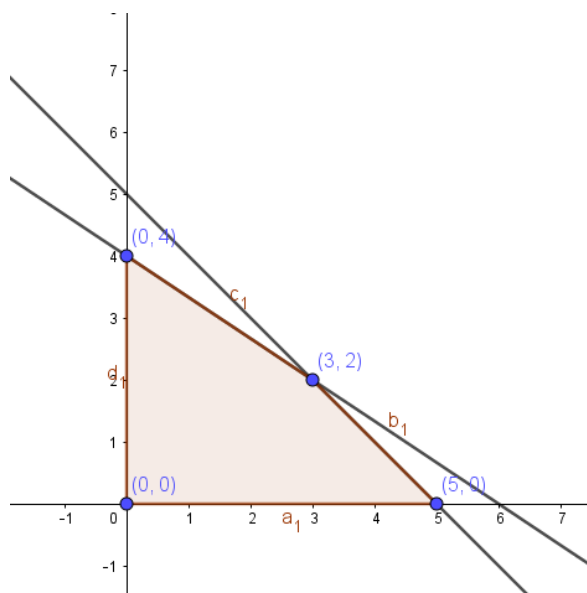
4. Una empresa de materials per a cotxes fabrica dos models d'una peça determinada, que anomenarem A i B. Cada model es fabrica en una hora, mitjançant un procés que consta de dues fases. En la primera fase del procés s'hi destinen 5 treballadors, i en la segona, 12. Per a fabricar cada model, en la primera fase es necessita un treballador per a cada peça. En canvi, en la segona fase es necessiten dos treballadors per al model A i 3 treballadors per al model B. El benefici que s'obté és de 40€ pel model A i 50€ pel model B.

- Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]
- Quantes peces de cada model per hora s'hauran de fabricar per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? [0,75 punts]

a) Anomenem  $x$  la quantitat de peces del model A i  $y$  la quantitat de peces del model B.

L'enunciat del problema ens condueix a les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Els beneficis venen donats per la següent funció objectiu:  $B(x, y) = 40x + 50y$ .

b) Si avaluem la funció objectiu en els quatre vèrtexs obtenim:

$$B(0,0) = 0\text{€},$$

$$B(5,0) = 200\text{€},$$

$$B(0,4) = 200\text{€} \text{ i}$$

$$B(3,2) = 220\text{€}.$$

Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt (3,2) i aquest màxim pren el valor 220€. Així doncs, per a maximitzar els beneficis cal fabricar 3 peces del model A i 2 peces del model B. Amb aquesta fabricació l'empresa aconseguirà 220 euros de beneficis.

*Criteris de correcció: Obtenció de les restriccions: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Obtenció dels vèrtexs i dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció del punt pel qual s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.*

5. Una companyia de mòbils va presentar fa un any un telèfon intel·ligent al preu de 750€. Recentment, un estudi de mercat ha arribat a la conclusió que, amb aquest preu, compren el telèfon 2.000 clients al mes, i que la relació entre aquestes dues variables és lineal, de manera que per cada 10 euros que s'incrementa el preu del mòbil, el compren 100 clients menys, i a l'inrevés: per cada 10 euros de descompte sobre el preu inicial de 750 euros, el compren 100 clients més.

- a. Deduïu que la funció que determina els ingressos mensuals de la companyia segons el preu del mòbil és  $I(p) = -10p^2 + 9500p$ . [1 punt]
- b. Trobeu quin ha de ser el preu del mòbil per a obtenir ingressos, el preu del mòbil que dona els ingressos mensuals més elevats i el valor d'aquests ingressos màxims. [1 punt]

- a) El preu del mòbil serà  $p = 750 + 10x$ , en què  $x$  és el nombre de vegades que s'augmenta el preu de l'abonament en 10 euros. El nombre de mòbils que es vendran al mes serà  $N = 2000 - 100x$ .

L'ingrés mensual  $I$  vindrà donat pel preu del mòbil  $p$  multiplicat pel nombre de mòbils que es venguin  $N$ , és a dir,  $I = p \cdot N$ . Si volem posar la funció d'ingrés en funció del preu del mòbil, caldrà aïllar la  $x$  en funció del preu  $p$  ( $p = 750 + 10x \rightarrow x = \frac{p-750}{10}$ ), llavors el nombre de mòbils en funció del preu  $p$  serà:  $N = 2000 - 100 \left( \frac{p-750}{10} \right) \rightarrow N = -10p + 9500$ . Així que la funció d'ingressos serà:  $I(p) = p \cdot (-10p + 9500)$ .

Obtenim, per tant, la paràbola  $I(p) = -10p^2 + 9500p$ .

- b) Perquè hi hagi ingressos cal que  $I(p) > 0 \rightarrow -10p^2 + 9500p > 0 \rightarrow p \cdot (-10p + 9500) > 0$ . Per tant, o bé  $p > 0$  i  $-10p + 9500 > 0$ , d'on obtenim  $0\text{€} < p < 950\text{€}$ , o bé caldria que  $p < 0$  i que  $(-10p + 9500) < 0$ , que no té sentit per la naturalesa del problema.

Per trobar el màxim ingrés derivem:  $I'(p) = -20p + 9500$ , i iguaem a zero:  $I'(p) = 0 \rightarrow p = 475$  €. Comprovem que correspon als ingressos màxims ja que  $I'(p) > 0$ , per a  $p < 475$  i  $I'(p) < 0$ , per a  $p > 475$ . Finalment, per calcular el valor d'aquests ingressos màxims, només cal calcular el valor de la funció Ingrés per a  $p = 475 \rightarrow I(475) = 475 \cdot (-10 \cdot 475 + 9500) = 475 \cdot 4750 = 2.256.250$ €

També es pot resoldre tenint en compte que la gràfica de la funció d'ingrés és una paràbola i obtenint-ne el màxim.

*Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval de valors perquè hi hagi ingressos: 0,5 p. Obtenció del preu pel qual s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim i obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.*

6. El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció  $P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}$ , en què  $t$  mesura el nombre d'anys transcorreguts.

- a. Quina és la població inicial i la població després de 9 anys? A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? [1 punt]
- b. Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? [1 punt]

a) Ens demanen que calculem la població inicial  $P(0) = 5$  milions d'habitants i la població al cap de 9 anys,  $P(9) = 0,86$  milions d'habitants.

Hem de trobar també a partir de quin instant la població serà inferior a un milió d'habitants, és a dir, per a quin valor de  $t$  es compleix  $\frac{5+t^2}{(t+1)^2} < 1$ . Aïllant obtenim  $t > 2$ , és a dir, a partir del segon any la població serà inferior a un milió d'habitants.

b) Hem de calcular el límit quan el temps tendeix a infinit. Tenim que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2+5}{t^2+2t+1} = 1$$

Per tant, la grandària de la població a llarg termini tendirà a un milió d'habitants.

*Criteris de correcció: a) Càlcul de la població inicial: 0,25 p. Càlcul de la població al cap de 9 anys: 0,25 p. Càlcul de l'instant en què la població passa a ser inferior a un milió d'habitants: 0,5 p. b) Plantejament que cal calcular el límit: 0,25 p. Càlcul del límit: 0,75 p.*

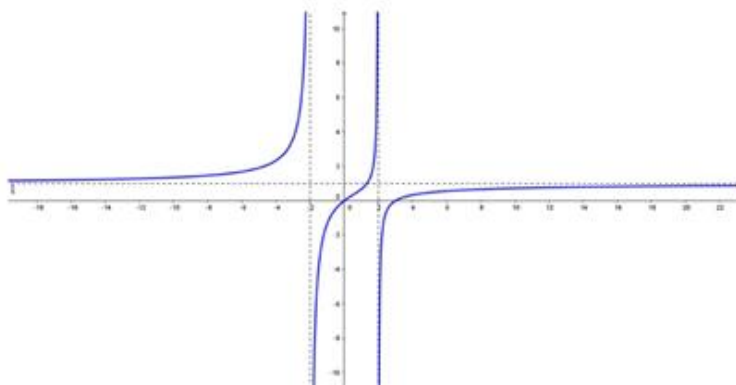
## SÈRIE 5

1. Sigui la funció  $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$

- Indiqueu-ne justificadament el domini i determineu els punts en què la gràfica de  $f$  talla l'eix de les abscisses. [1 punt]
- Estudieu-ne el creixement i feu un esbós aproximat de la gràfica de la funció. [1 punt]

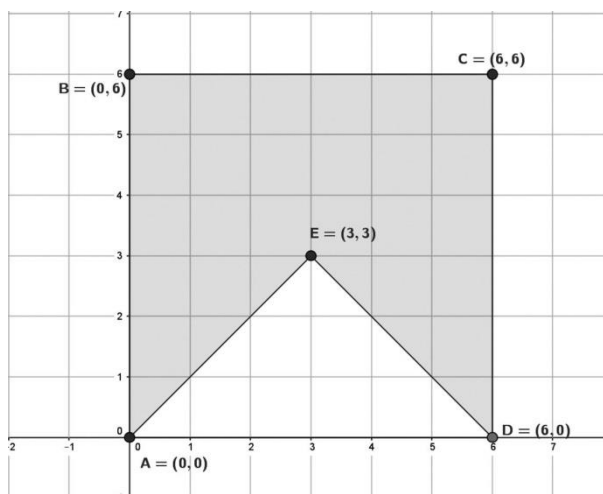
a)  $x^2 - 4 = 0$  si  $x = \pm 2$ , per tant, el domini de  $f$  són tots els nombre reals excepte aquests dos. D'altra banda,  $x^2 - 3x = 0$  quan  $x = 0$  o  $x = 3$ : la gràfica de  $f$  talla l'eix d'abscisses en els punts  $(0,0)$  i  $(3,0)$ .

b) La derivada de la funció  $f$  és  $f'(x) = \frac{3x^2-8x+12}{(x^2-4)^2}$ . Com que  $3x^2 - 8x + 12 = 0$  no té solucions reals i  $f'$  sempre és positiva la funció  $f$  és creixent en tot el seu domini. La seva gràfica aproximada és:



*Criteris de correcció: a) Determinació del domini, expressat de qualsevol forma: 0,5 p. Punts de tall amb l'eix d'abscisses: 0,5 p.. b) Estudi del creixement: 0,5 p. Gràfica aproximada: 0,5 p*

2. Considereu el pentàgon ABCDE de la figura següent:



- a) Justifiqueu que la regió ombrejada no es pot representar mitjançant un sistema d'inequacions. [1 punt]
- b) Escriviu el sistema d'inequacions que determina els punts de la frontera i de l'interior del triangle AED. [1 punt]
- a) Si considerem la recta que passa pels punts A, E i C, d'equació  $y = x$ , determina dos semiplans  $y < x$  i  $y > x$ , i cap dels dos pot contenir alhora els punts B i D.
- b) La recta AE es  $y = x$ . La recta ED es  $y = -x + 6$ . La recta AD es  $y = 0$ . El sistema d'inequacions es:

$$\left\{ \begin{array}{l} y \leq x \\ y \leq -x + 6 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

*Criteris de correcció: a) Raonament correcte: 1 p. b) Equacions: 0,5 p. Sistema d'inequacions: 0,5 p.*

3. Sigui  $y = f(x)$  una paràbola que té el vèrtex en el punt  $V = (0, -4)$  i talla l'eix de les abscisses en els punts  $(-2, 0)$  i  $(2, 0)$ .
- a) Determineu-ne l'equació. [1 punt]
- b) Sigui una funció  $g$  tal que  $g'(x) = f(x)$ . Estudieu el creixement de la funció  $g$ , determineu-ne les abscisses dels extrems relatius i classifiqueu-los. [1 punt]
- a) L'equació de la paràbola serà  $y = a(x - 0)^2 - 4$  i, si ha de passar pels dos punts que ens donen, obtenim que  $a = 1$ . Per tant, l'equació de la paràbola és  $y = x^2 - 4$ . Alternativament es pot plantejar un sistema de tres equacions i tres incògnites a partir dels tres punts.
- b) La paràbola és positiva per a  $x < -2$  o  $x > 2$ , i negativa per  $-2 < x < 2$ . Per tant, la funció  $g$  és creixent en els dos primers intervals i decreixent en l'altre. Conseqüentment,  $g$  té un màxim relatiu en  $x = -2$  i un mínim relatiu en  $x = 2$ .

*Criteris de correcció: a) 1 p. b) Raonament del creixement: 0,5 p. Determinació d'extrems i classificació: 0,5 p.*

4. Considereu el sistema d'equacions  $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Justifiqueu si les afirmacions següents són certes:

a) Aquest sistema d'equacions representa dues rectes paral·leles perquè totes dues tenen pendent  $-1$ . [1 punt]

b) Aquest sistema és compatible determinat i la solució és  $x = 1, y = 1$ . [1 punt]

a) Les rectes son  $y = 2x - 1$  que té pendent 2 i  $y = -x + 2$  que té pendent  $-1$ . Per tant no són paral·leles.

b) Si resollem el sistema format per les dues equacions obtenim la solució  $x = 1, y = 1$ . Alternativament podem comprovar que  $x = 1, y = 1$  satisfà les dues equacions.

*Criteris de correcció: a) Raonament que no poden ser paral·leles: 1 p. b) Raonament que aquesta és la solució: 1 p.*

5. Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona nau guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Record i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520€, mentre que cada Astrid val 8.130€. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

a) Què representa la matriu  $B \cdot A$ ? Calculeu-la. [1 punt]

b) Què representa la matriu  $B \cdot A \cdot P$ ? Calculeu-la. [1 punt]

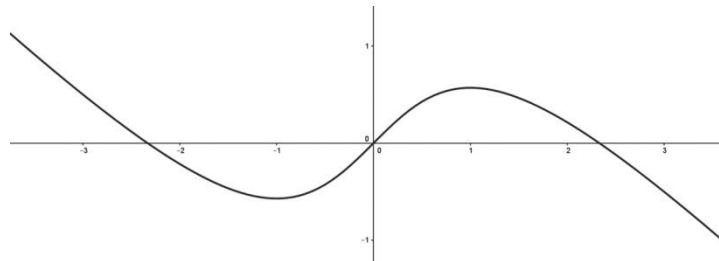
a) El producte  $B \cdot A$  ens dona el nombre de cotxes que tenim de cada model:  $B \cdot A = (480 \ 385)$ .

b) El producte  $B \cdot A \cdot P$  ens dona el valor total dels cotxes emmagatzemats:  $B \cdot A \cdot P = 6.259.650$ .

*Criteris de correcció: a) Significat de la matriu: 0,75p. Càlcul: 0,25 p. b) Significat de la matriu: 0,75p. Càlcul: 0,25 p.*



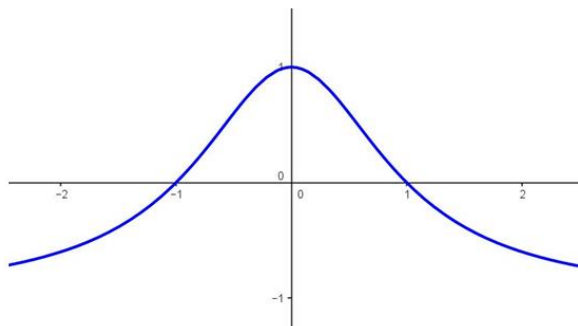
6. A continuació es mostra la gràfica d'una funció  $f$  que presenta un mínim relatiu en el punt d'abscissa  $x = -1$  i un màxim relatiu en el punt d'abscissa  $x = 1$ .



- a) Sabent que  $f'(0) = 1$ , determineu l'equació de la recta tangent a  $f$  que passa per l'origen de coordenades. [1 punt]
- b) Feu un esbós de la gràfica de la funció  $f'$  amb les dades de què disposeu. [1 punt]

a) El pendent de la recta tangent és 1, i passa per l'origen. Per tant l'equació serà  $y = x$ .

b) Com que  $f$  és decreixent fins a  $x = -1$ , en aquest interval  $f'$  serà negativa. Si  $-1 < x < 1$  la funció és creixent. Per tant, la derivada és positiva, mentre que si  $x > 1$  la derivada torna a ser negativa. Com que a més a més sabem que  $f'(0) = 1$ , la gràfica serà aproximadament així



*Criteris de correcció: a) Obtenció del pendent: 0,5p. Equació de la recta: 0,5 p.  
b) Raonament: 0,5 p. Obtenció de la gràfica aproximada: 0,5 p.*